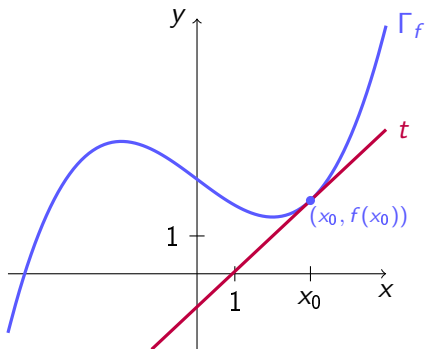




## 3.2. Primjene derivacije

30.10.2020.

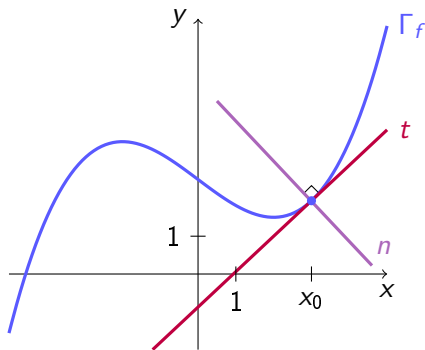
# Jednadžba tangente $t$ na $\Gamma_f$ u točki $(x_0, f(x_0))$



Pretpostavimo da  $f'(x_0)$  postoji. Tada je  $t$  pravac kroz točku  $(x_0, f(x_0))$  s koeficijentom smjera  $f'(x_0)$ , pa je njena jednadžba

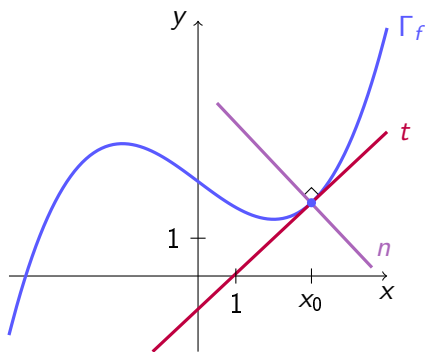
$$t \dots y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

# Jednadžba normale $n$ na $\Gamma_f$ u točki $(x_0, f(x_0))$



**Normala**  $n$  na  $\Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  definira se kao pravac kroz točku  $(x_0, f(x_0))$  koji je okomit na  $t$ .

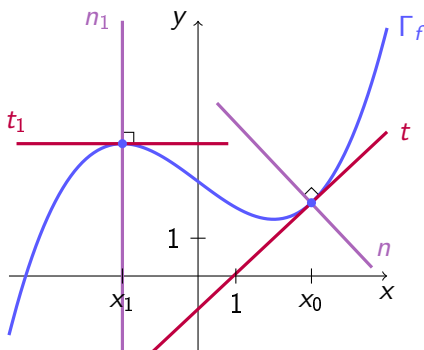
# Jednadžba normale $n$ na $\Gamma_f$ u točki $(x_0, f(x_0))$



**Normala**  $n$  na  $\Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  definira se kao pravac kroz točku  $(x_0, f(x_0))$  koji je okomit na  $t$ . Njena je jednadžba

$$n \dots \begin{cases} y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), & \text{ako je } f'(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

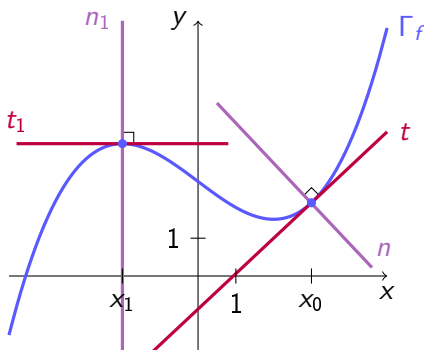
# Jednadžba normale $n$ na $\Gamma_f$ u točki $(x_0, f(x_0))$



**Normala**  $n$  na  $\Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  definira se kao pravac kroz točku  $(x_0, f(x_0))$  koji je okomit na  $t$ . Njena je jednadžba

$$n \dots \begin{cases} y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), & \text{ako je } f'(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

# Jednadžba normale $n$ na $\Gamma_f$ u točki $(x_0, f(x_0))$



**Normala**  $n$  na  $\Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  definira se kao pravac kroz točku  $(x_0, f(x_0))$  koji je okomit na  $t$ . Njena je jednadžba

$$n \dots \begin{cases} y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), & \text{ako je } f'(x_0) \neq 0, \\ x = x_0, & \text{ako je } f'(x_0) = 0. \end{cases}$$

## Zadatak 26

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

## Zadatak 26

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$



Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\leadsto f'(x) = x^2$ )

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\leadsto f'(x) = x^2 \leadsto f'(-1) = 1$ ).

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\leadsto f'(x) = x^2 \leadsto f'(-1) = 1$ ).

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = 1 \cdot (x + 1)$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\rightsquigarrow f'(x) = x^2 \rightsquigarrow f'(-1) = 1$ ).

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \cdot (x + 1)$$

$$y = x + \frac{2}{3}.$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\leadsto f'(x) = x^2 \leadsto f'(-1) = 1$ ).

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = 1 \cdot (x + 1)$$

$$y = x + \frac{2}{3}.$$

Normala u točki  $(-1, -\frac{1}{3})$ :

$$n \dots y - f(-1) = -\frac{1}{f'(-1)} \cdot (x - (-1))$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\leadsto f'(x) = x^2 \leadsto f'(-1) = 1$ ).

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = 1 \cdot (x + 1)$$

$$y = x + \frac{2}{3}.$$

Normala u točki  $(-1, -\frac{1}{3})$ :

$$n \dots y - f(-1) = -\frac{1}{f'(-1)} \cdot (x - (-1))$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{1} \cdot (x + 1)$$



Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K \dots y = \frac{x^3}{3}$$

u točki s apscisom  $-1$ .

*Napomena.* Za točku  $(x, y)$ ,  $x$  zovemo **apscisom**, a  $y$  **ordinatom**.

*Rješenje.*  $K = \Gamma_f$  za funkciju  $f(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $\leadsto f'(x) = x^2 \leadsto f'(-1) = 1$ ).

Tangenta u točki  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{3})$ :

$$t \dots y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = 1 \cdot (x + 1)$$

$$y = x + \frac{2}{3}.$$

Normala u točki  $(-1, -\frac{1}{3})$ :

$$n \dots y - f(-1) = -\frac{1}{f'(-1)} \cdot (x - (-1))$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{1} \cdot (x + 1)$$

$$y = -x - \frac{4}{3}.$$

## Zadatak 27

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases} \quad (1)$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 24x + 48 = 0$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 24x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overset{\cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} x^2 + 8x + 16 = 0$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48 \Leftrightarrow 3x^2 + 24x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdot \frac{1}{3} \quad x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48 \Leftrightarrow 3x^2 + 24x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdot \frac{1}{3} \quad x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$



Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48 \Leftrightarrow 3x^2 + 24x + 48 = 0$$

$$\stackrel{\cdot \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$\Rightarrow x = -4, y \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} ((-4)^2 + 8(-4)) = -8.$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Krivulje  $K_1$  i  $K_2$  sijeku se u točki  $S = (x, y)$  koja je rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 8x & (1) \\ 2y = -2x^2 - 16x - 48. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $2y$  danog prvom jednadžbom u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2 + 8x = -2x^2 - 16x - 48 \Leftrightarrow 3x^2 + 24x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdot \frac{1}{3} \quad x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$\Rightarrow x = -4, y \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} ((-4)^2 + 8(-4)) = -8. \text{ Dakle, } S = (-4, -8).$$

## Zadatak 27

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4)$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4 \quad \leadsto f'(-4) = 0).$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4 \quad \leadsto f'(-4) = 0).$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

$$y + 8 = 0$$



Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4 \quad \leadsto f'(-4) = 0).$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

$$y + 8 = 0$$

$$y = -8.$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4 \quad \leadsto f'(-4) = 0).$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

$$y + 8 = 0$$

$$y = -8.$$

Normala na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4 \quad \leadsto f'(-4) = 0).$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

$$y + 8 = 0$$

$$y = -8.$$

Normala na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ : (! slučaj  $f'(x_0) = 0$ )

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$K_1 \dots 2y = x^2 + 8x$$

u točki u kojoj ona siječe krivulju

$$K_2 \dots 2y = -2x^2 - 16x - 48.$$

*Rješenje.* Dakle,  $K_1$  i  $K_2$  se sijeku u točki  $S = (-4, -8)$ .

$$K_1 = \Gamma_f \text{ za } f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 4x \quad (\leadsto f'(x) = x + 4 \quad \leadsto f'(-4) = 0).$$

Tangenta na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ :

$$t \dots y - (-8) = f'(-4) \cdot (x - (-4))$$

$$y + 8 = 0$$

$$y = -8.$$

Normala na  $K_1$  u točki  $S = (-4, -8)$ : (! slučaj  $f'(x_0) = 0$ )

$$n \dots x = -4.$$

## Zadatak 28

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

## Zadatak 28

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

## Zadatak 28

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$



U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$\begin{aligned}y - f(2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \\y - (4 + 2a + b) &= \end{aligned}$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$   
 $(\leadsto f'(x) = 2x + a)$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - (4 + 2a + b) =$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

$$(\rightsquigarrow f'(x) = 2x + a \rightsquigarrow f'(2) = 4 + a).$$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \\ y - (4 + 2a + b) &= \end{aligned}$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

$$(\rightsquigarrow f'(x) = 2x + a \rightsquigarrow f'(2) = 4 + a).$$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - (4 + 2a + b) = (4 + a)(x - 2)$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

$$(\rightsquigarrow f'(x) = 2x + a \rightsquigarrow f'(2) = 4 + a).$$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - (4 + 2a + b) = (4 + a)(x - 2)$$

$$y = (4 + a)x + b - 4.$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

$$(\rightsquigarrow f'(x) = 2x + a \rightsquigarrow f'(2) = 4 + a).$$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \\ y - (4 + 2a + b) &= (4 + a)(x - 2) \\ y &= (4 + a)x + b - 4. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  Hoćemo

$$\begin{cases} 4 + a = 1 \\ b - 4 = 0 \end{cases}$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

$$(\rightsquigarrow f'(x) = 2x + a \rightsquigarrow f'(2) = 4 + a).$$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \\ y - (4 + 2a + b) &= (4 + a)(x - 2) \\ y &= (4 + a)x + b - 4. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  Hoćemo

$$\begin{cases} 4 + a = 1 \\ b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4. \end{cases}$$

U jednadžbi parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 + ax + b$$

odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da  $\mathcal{P}$  dira pravac  $y = x$  u točki s apscisom 2.

*Rješenje.*  $\mathcal{P} = \Gamma_f$  za  $f(x) := x^2 + ax + b$

$$(\rightsquigarrow f'(x) = 2x + a \rightsquigarrow f'(2) = 4 + a).$$

Hoćemo da pravac  $y = x$  bude tangenta na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ .

Jednadžba tangente na  $\Gamma_f$  u točki  $(2, f(2))$ :

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \\ y - (4 + 2a + b) &= (4 + a)(x - 2) \\ y &= (4 + a)x + b - 4. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  Hoćemo

$$\begin{cases} 4 + a = 1 \\ b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4. \end{cases}$$

Dakle,  $a = -3$  i  $b = 4$ .



## Zadatak 29

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

## Zadatak 29

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*1. način.* To su točke  $(x, y)$  koje zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} K \dots y = 4x - x^2 \\ x\text{-os} \dots y = 0 \end{cases}$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*1. način.* To su točke  $(x, y)$  koje zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} K \dots y = 4x - x^2 \\ x\text{-os} \dots y = 0 \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $y$  danog prvom jednadžbom u drugu dobivamo

$$4x - x^2 = 0$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*1. način.* To su točke  $(x, y)$  koje zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} K \dots y = 4x - x^2 \\ x\text{-os} \dots y = 0 \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $y$  danog prvom jednadžbom u drugu dobivamo

$$4x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*1. način.* To su točke  $(x, y)$  koje zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} K \dots y = 4x - x^2 \\ x\text{-os} \dots y = 0 \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $y$  danog prvom jednadžbom u drugu dobivamo

$$4x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0. \end{cases}$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje s  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

1. način. To su točke  $(x, y)$  koje zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} K \dots y = 4x - x^2 \\ x\text{-os} \dots y = 0 \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za  $y$  danog prvom jednadžbom u drugu dobivamo

$$4x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0. \end{cases}$$

Dakle, sjecišta su točke  $(0, 0)$  i  $(4, 0)$ .

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*2. način.*



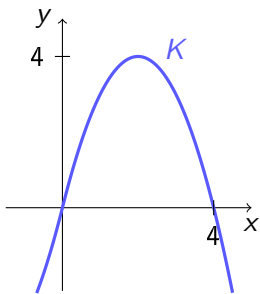
Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*2. način.*



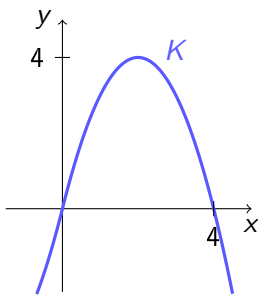
Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Odredimo najprije sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi.

*2. način.*



⇒ Sjecišta su točke  $(0, 0)$  i  $(4, 0)$ .

## Zadatak 29

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

## Zadatak 29

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$t_1 \dots y - 0 = f'(0) \cdot (x - 0)$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2 \quad (\rightsquigarrow \quad f'(x) = 4 - 2x).$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$t_1 \dots y - 0 = f'(0) \cdot (x - 0)$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2 \quad (\rightsquigarrow f'(x) = 4 - 2x).$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} t_1 \dots y - 0 &= f'(0) \cdot (x - 0) \\ y &= 4x. \end{aligned}$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2 \quad (\rightsquigarrow f'(x) = 4 - 2x).$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} t_1 \dots y - 0 &= f'(0) \cdot (x - 0) \\ y &= 4x. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(4,0)$ :



Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2 \quad (\rightsquigarrow \quad f'(x) = 4 - 2x).$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} t_1 \dots y - 0 &= f'(0) \cdot (x - 0) \\ y &= 4x. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(4,0)$ :

$$t_2 \dots y - 0 = f'(4) \cdot (x - 4)$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2 \quad (\rightsquigarrow f'(x) = 4 - 2x).$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} t_1 \dots y - 0 &= f'(0) \cdot (x - 0) \\ y &= 4x. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(4,0)$ :

$$\begin{aligned} t_2 \dots y - 0 &= f'(4) \cdot (x - 4) \\ y &= -4(x - 4) \end{aligned}$$

Odredite jednadžbe tangenti na krivulju

$$K \dots y = 4x - x^2$$

u sjecištima te krivulje sa  $x$ -osi.

*Rješenje.* Dakle, sjecišta krivulje  $K$  sa  $x$ -osi su točke  $(0,0)$  i  $(4,0)$ .

$$K = \Gamma_f \text{ za } f(x) := 4x - x^2 \quad (\rightsquigarrow \quad f'(x) = 4 - 2x).$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} t_1 \dots y - 0 &= f'(0) \cdot (x - 0) \\ y &= 4x. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(4,0)$ :

$$\begin{aligned} t_2 \dots y - 0 &= f'(4) \cdot (x - 4) \\ y &= -4(x - 4) \\ y &= -4x + 16. \end{aligned}$$

## Zadatak 30

U kojoj točki krivulje

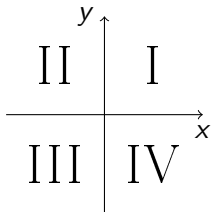
$$K \dots y = -\sqrt[3]{x}$$

trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x}$$

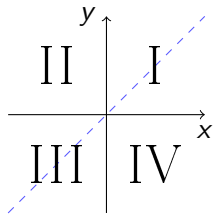
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?



U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x}$$

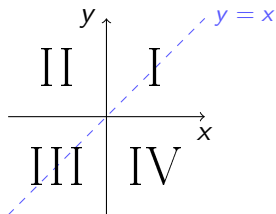
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?



U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x}$$

trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?



U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x}$$

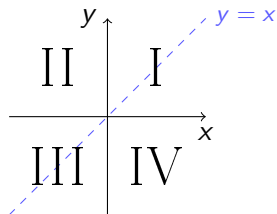
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

vrijedi:  $p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$





U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x)$$

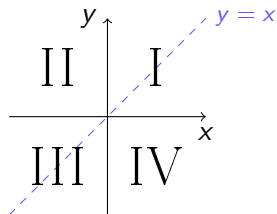
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi:} \quad p_1 \parallel p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1.$$



U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x)$$

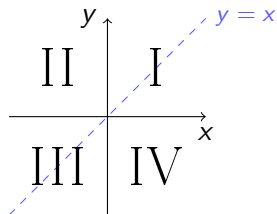
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi:} \quad p_1 \parallel p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x)$$

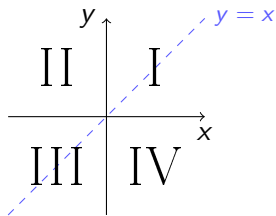
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1 x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2 x + l_2$$

$$\text{vrijedi:} \quad p_1 \parallel p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x)$$

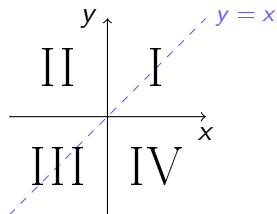
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1 x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2 x + l_2$$

$$\text{vrijedi:} \quad p_1 \parallel p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = -1$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

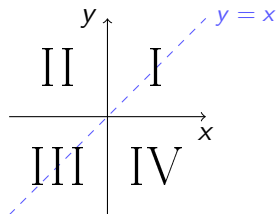
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

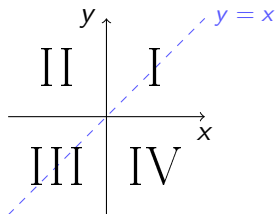
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

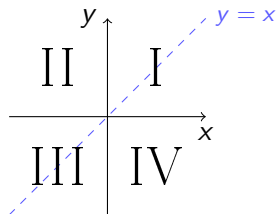
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1 \quad \Leftrightarrow x_0^{-\frac{2}{3}} = 3$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

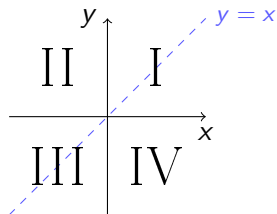
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

Rješenje. Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1 \quad \Leftrightarrow x_0^{-\frac{2}{3}} = 3 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0})^2} = 3$$



U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

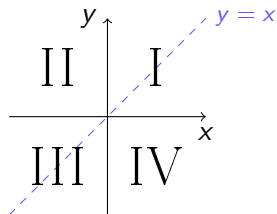
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

Rješenje. Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1 \quad \Leftrightarrow x_0^{-\frac{2}{3}} = 3 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0})^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x_0})^2 = \frac{1}{3}$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

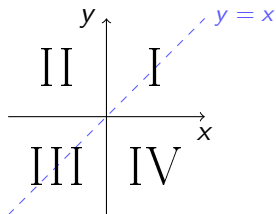
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

*Rješenje.* Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1 \quad \Leftrightarrow x_0^{-\frac{2}{3}} = 3 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0})^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x_0})^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

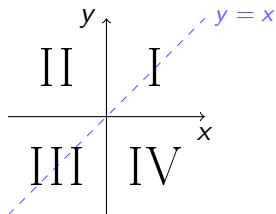
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

Rješenje. Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1 \Leftrightarrow x_0^{-\frac{2}{3}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0})^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x_0})^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \stackrel{3}{\Leftrightarrow} x_0 = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

U kojoj točki krivulje

$$K \dots y = -\sqrt[3]{x} =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$

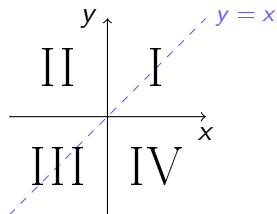
trebamo povući tangentu da bi ona bila okomita na simetralu I. kvadranta?

Rješenje. Sjetimo se: za pravce

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1 \quad \text{i} \quad p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$\text{vrijedi: } p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$



Dakle, tangenta na  $K = \Gamma_f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$  okomita je na pravac  $y = x$

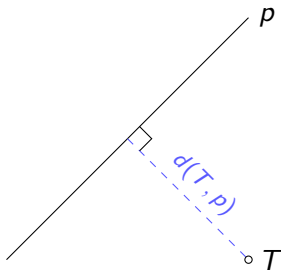
$$\Leftrightarrow \text{koeficijent smjera joj je } -\frac{1}{k_{y=x}} = -\frac{1}{1} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = -1 \Leftrightarrow x_0^{-\frac{2}{3}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0})^2} = 3$$

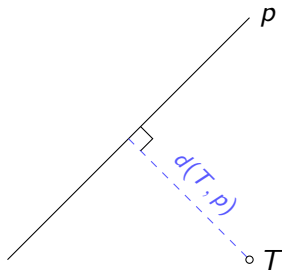
$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x_0})^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \stackrel{3}{\Leftrightarrow} x_0 = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$\Rightarrow$  Tangentu treba povući u bilo kojoj od točaka  $\left(\pm \frac{1}{3\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

# Udaljenost točke od pravca u ravni



# Udaljenost točke od pravca u ravnini



Udaljenost točke  $T = (x_0, y_0)$  od pravca

$$p \dots Ax + By + C = 0$$

iznosi

$$d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

## Zadatak 31

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

## Zadatak 31

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$



## Zadatak 31

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right) = \left( -\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1} \right)$  .

## Zadatak 31

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right) = \left( -\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1} \right) = (2, 1)$ .

## Zadatak 31

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right) = \left( -\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1} \right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi:

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases}$$

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad S = (0, 5).$$

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :  $t \dots y - 5 = f'(0) \cdot (x - 0)$



Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x) \quad (\rightsquigarrow f'(x) = 2x - 4)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :  $t \dots y - 5 = f'(0) \cdot (x - 0)$

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x) \quad (\rightsquigarrow f'(x) = 2x - 4)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1).$

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :  $t \dots y - 5 = f'(0) \cdot (x - 0)$   
 $y - 5 = -4x$

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x) \quad (\rightsquigarrow f'(x) = 2x - 4)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1).$

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :  $t \dots y - 5 = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$y - 5 = -4x$$

$$4x + y - 5 = 0.$$

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = 2x - 4)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1).$

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \quad \leadsto \quad S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :  $t \dots y - 5 = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$y - 5 = -4x$$

$$4x + y - 5 = 0.$$

Dakle,

$$d(T, t) = \frac{|4 \cdot 2 + 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 1^2}}$$

Izračunajte udaljenost tjemena parabole

$$\mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 =: f(x) \quad (\leadsto f'(x) = 2x - 4)$$

od tangente na  $\mathcal{P}$  povučene u sjecištu parabole  $\mathcal{P}$  sa  $y$ -osi.

*Rješenje.* Tjeme od  $\mathcal{P}$ :  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) = (2, 1)$ .

Sjecište  $S$  parabole  $\mathcal{P}$  s  $y$ -osi: točka  $S = (x, y)$  koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \mathcal{P} \dots y = x^2 - 4x + 5 \\ y\text{-os} \dots x = 0 \end{cases} \quad \leadsto \quad S = (0, 5).$$

Tangenta na  $\mathcal{P}$  povučena u točki  $S$ :  $t \dots y - 5 = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$y - 5 = -4x$$

$$4x + y - 5 = 0.$$

Dakle,

$$d(T, t) = \frac{|4 \cdot 2 + 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$